

Simulation des Erstverschiebungsverhaltens von Betonplatten

DI Dr. Heinz Wimmer
MPT Engineering GmbH, Oberneukirchen, OÖ

KURZFASSUNG: Betonfahrbahnen erfahren durch klimatische Einflüsse eine Erwärmung und wollen sich in der Folge ausdehnen. Diese Längsverschiebung wird durch Reibung an der Plattenunterseite teilweise behindert. Die Modellierung von Auflagerbedingungen und Kräfteinflüssen soll speziell das Erstverschiebungsverhalten der Betonplatten simulieren.

1 MECHANISCHE GRUNDLAGEN

Für eine vollflächige Lagerung (Bettung) werden die folgenden Verschiebungs- u. Schnittgrößen angesetzt:

Durch Vereinigung der beiden Gleichungen (1a) und (1b) entsteht die Differentialgleichung der Längsverschiebung $u = u(x)$ bei kontinuierlicher, verschiebungsproportionaler Bettung:

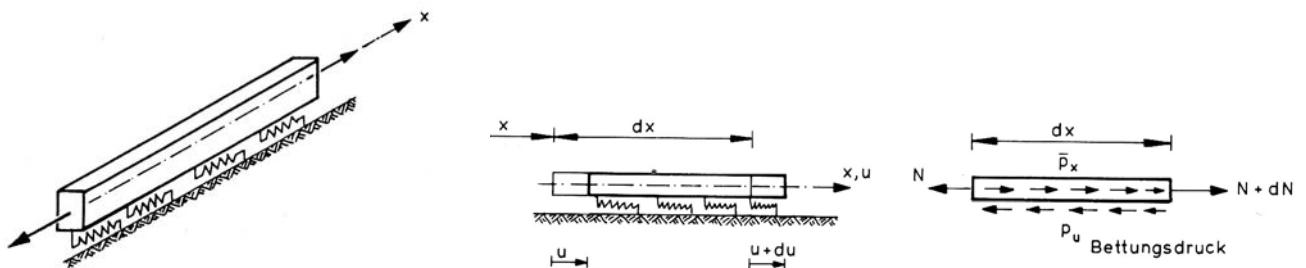


Abbildung 1 Elastisch gebetteter Dehnstab [1]

Die grundlegenden Bewegungsgleichungen lauten:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(EA \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) + k_u \cdot u + \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} (EA \cdot \alpha \cdot \Delta T_m) = \bar{p}_x \quad (2)$$

Kinematik

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x = \frac{N}{EA} + \alpha \cdot \Delta T_m \quad (1a)$$

Die Normalkraft berechnet sich bei bekannter Verschiebungsfunktion $u(x)$ mit

Gleichgewicht

$$N(x) = EA \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - EA \cdot \alpha \cdot \Delta T_m \quad (3)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = k_x \cdot u + \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \bar{p}_x(x, t) \quad (1b)$$

Darin bedeuten:

- E ... Elastizitätsmodul
- A ... Querschnittsfläche
- α ... Temperatureausdehnungskoeffizient
- ΔT_m ... Temperaturänderung in Plattenmitte
- k_x ... Bettungskoeffizient für horizontale Bettung
- ρ ... Massendichte
- \bar{p}_x ... verteilte Längskraft

Bei Vernachlässigung dynamischer Vorgänge bei denen Massenträgheitskräfte eine Rolle spielen und unter Voraussetzung konstanter Dehnsteifigkeit EA und Temperaturbelastung ΔT_m folgt aus Glg. (2)

$$-EA \cdot u'' + k_x \cdot u = \bar{p}_x \quad (4)$$

Für eine lineare Bettung $k_x = \text{konst.}$ kann Glg. (4) analytisch exakt gelöst werden. Unter der Annahme der Belastungsfunktion $\bar{p}_x = \bar{p}_0 + \bar{p}_1 \cdot x$ lautet sie nach [1]:

$$u(x) = \frac{\bar{p}_0}{k_x} + \frac{\bar{p}_1 \cdot x}{k_x} + C_1 \cdot \cos \lambda \cdot x + C_2 \cdot \sin \lambda \cdot x \quad (5a)$$

Für die Normalkraft $N(x)$ im Stab folgt

$$N(x) = EA \cdot \frac{\bar{p}_1}{k_x} + C_1 \cdot (-\lambda \cdot EA \cdot \sin \lambda \cdot x) + C_2 \cdot (\lambda \cdot EA \cdot \cos \lambda \cdot x) - EA \cdot \alpha \cdot \Delta T_m \quad (5b)$$

$$\text{mit } \lambda = \sqrt{\frac{k_x}{EA}} \quad (5c)$$

Die beiden Integrationskonstanten werden aus den Randbedingungen an den beiden Plattenenden ($x=0$ und $x=l$) bestimmt.

2 DISKRETES MODELL

Eine reale Fahrbahn weist eine Reihe von Diskontinuitäten und Veränderlichkeiten auf, welche mit dem Modell nach Punkt 1 nicht erfassbar sind. Als wesentliche Einflussgröße ist die Bettungskraft nicht durchgängig proportional zur Verschiebung sondern veränderlich bzw. konstant. Im allgemeinen Fall ist die Bettungsreaktion eine Funktion der Verschiebung u

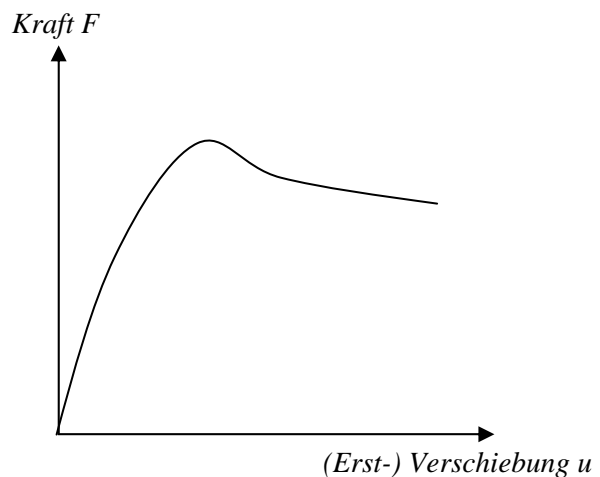


Abbildung 2 Kraftverlauf der axialen Bettung

Aus diesen und anderen Veränderlichkeiten resultiert eine Differentialgleichung mit veränderlichen Koeffizienten, welche analytisch nicht mehr lösbar ist. Somit wird auf ein numerisches Modell gesetzt, welches keinerlei Einschränkungen bzgl. des Verlaufes aller beteiligten Größen aufweist.

Die Fahrbahn wird als zwei-dimensionale, zusammenhängende Stabwerkskette aus finiten Elementen simuliert. Damit können in Ergänzung zu bisherigen Untersuchungen [2], [3] auch Verschiebungsanteile in Querrichtung berechnet werden.

Die Modellierung der Bettung erfolgt durch Einzelfedern in Richtung der

beiden horizontalen Freiheitsgrade an den Knotenpunkten (=Querfugen) der Fahrbahnplatte.

Da die Temperaturbelastung der Fahrbahn immer auch einen Gradienten aufweist, liegt die Platte bei Erwärmung von oben ohnedies nur in den Eckbereichen auf. Diese Tatsache gilt bei größeren Gradienten sogar auch dann, wenn die Platte unter Verkehrsbelastung kommt [4], sodass ein Verzicht auf eine kontinuierliche Längsbettung nach Punkt 1 als das realitätsnähere Modell erachtet werden muss.

3 FINITE ELEMENTE METHODE

Die Finite Elemente Methode (FE) gehört seit mehreren Jahrzehnten zu den effizientesten numerischen Näherungsverfahren [5] bei der mathematischen Lösung sogenannter Feldprobleme. Ihr Hauptmerkmal und zugleich ihr Erfolgsrezept liegt in ihrer Unabhängigkeit von geometrischen Bedingungen und in ihrer generellen Abbildungsvielfalt. Schließlich können alle Werkstoffparameter auch ein nichtlineares Verhalten aufweisen.

Mit Hilfe von Energie- bzw. Variationsprinzipien [1], [6] kann jedes physikalische Problem – formuliert als Differentialgleichung – für eine FE-Analyse aufbereitet werden. Für die Gleichung (2) folgt unter den oben genannten Voraussetzungen die Steifigkeitsbeziehung eines ebenen Dehnstabes im lokalen Koordinatensystem in Matrixschreibweise

$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} s_{0i} \\ s_{0k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s_i \\ s_k \end{Bmatrix} \quad (6a)$$

$$\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{u} + \mathbf{s}_0 = \mathbf{s} \quad (6b)$$

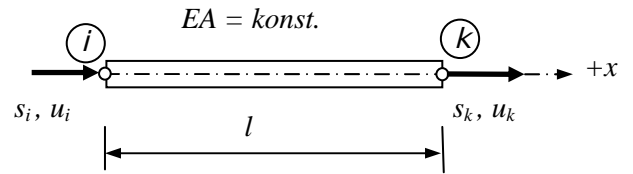


Abbildung 3 Dehnstab mit Knotenfreiheitsgraden

Aus Abbildung 3 liest man ab, dass für die Normalkraft im Stab gilt:

$$N = s_k \quad (7)$$

Für den Fall das Lasten zwischen den Knoten i und k angreifen, lautet der Elementlastvektor s_0

$$\begin{Bmatrix} s_{0i} \\ s_{0k} \end{Bmatrix} = EA \alpha \cdot \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} - \frac{\bar{p}_x \cdot l}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

Darin bedeutet \bar{p}_x eine axial wirkende, auf den Laufmeter bezogene Gleichlast, z.B. einen Hangabtrieb.

Wird nun eine Betonfahrbahn als gelenkig verbundene Stabkette mit beliebiger Orientierung modelliert, müssen die „Elementbeiträge“ zunächst in ein globales Koordinatensystem transformiert und in geeigneter Weise aufaddiert werden [1].

Eine Berücksichtigung der Bettung kann auf unterschiedliche Weise erfolgen. Bei einer kontinuierlichen Bettung existiert neben einer Herleitung der Steifigkeitsmatrix auf Basis der exakten Lösung der Differentialgleichung (5a) auch die Möglichkeit, den Bettungseinfluss in Form einer linearisierten Bettungsmatrix \mathbf{k}_b zu formulieren, welche zur Dehnstab-Matrix \mathbf{k}_e aus Glg. (6) hinzuaddiert wird.

Da sich Knotenpunkte bei Stabketten auch quer zur Stabachse verschieben und die Platte i. a. nicht vollflächig aufliegt, wird hier ein anderer Weg beschrieben. Die Bettung wird in Form von einem Paar diskreter Federn an jedem Knotenpunkt in Richtung der

globalen Koordinatenachsen modelliert. Die Federn werden als isotrop betrachtet, jedoch mit einer nichtlinearen Arbeitslinie nach Abb. 2 ausgestattet.

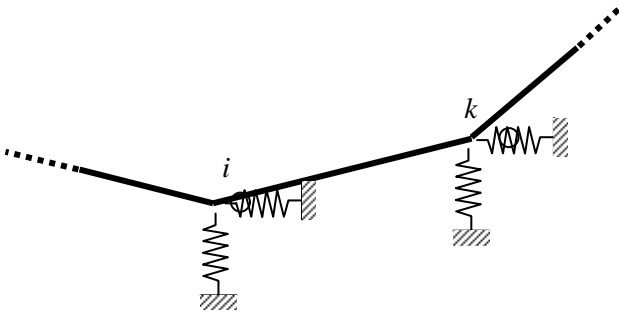


Abbildung 4 Diskretes Bettungsmodell (im Grundriss)

Bei der programmtechnischen Umsetzung bedeutet dies, dass die Federsteifigkeiten zu den Diagonaltermen der globalen Matrix hinzuaddiert werden.

4 MATERIELL NICHTLINEARE LÖSUNG

Werden für die Bettungsfedern auch nichtlineare Federcharakteristiken zugelassen, wird die globale Steifigkeitsmatrix K ebenfalls nichtlinear:

$$[K(U)] \cdot \{U\} = \{S\} - \{S_0\} \quad (9)$$

Eine Abschätzung der maximal zu erwartenden Betonstauchungen [7] liefert Werte

$$\varepsilon_T = \alpha_T \cdot \Delta T \cong 1 \cdot 10^{-5} \cdot 20 = 0,0002$$

In diesem Dehnungsbereich (ca. 1/15 der Bruchdehnung) ist es ausreichend genau, den Elastizitätsmodul als Konstante aufzufassen. Eine Berücksichtigung eines spannungs- bzw. dehnungsabhängigen Moduls wäre bei der vorliegenden Formulierung ohne besonderen Mehraufwand möglich.

Für die Lösung von Glg. (9) stehen eine

Reihe von Strategien zur Verfügung. Eine Übersicht möglicher Algorithmen findet sich z.B. in [1].

Im vorliegenden Fall wurde eine Sekanteniteration gewählt. Es zeigt sich dabei, dass im Falle einer nichtlinearen Bettung die Orientierung des Federnpaares nicht beliebig, sondern immer in Richtung des resultierenden Verschiebungsvektors und senkrecht dazu, erfolgen muss. Dazu ist es nötig, während der Iteration nicht nur die Federsteifigkeiten sondern auch die Federorientierung fortlaufend anzupassen.

Über Ergebnisse von Vergleichsrechnungen wird im Abschlussbericht des Forschungsvorhabens „Betondecke auf Kantkorntragschicht“ berichtet.

5 LITERATUR

[1] Mehlhorn, G. (Hrsg.): Der Ingenieurbau, Band 5 - Baustatik und Baudynamik, Verlag Ernst & Sohn, Berlin 1996

[2] Wicke, M.: Theoretische Untersuchungen der Längsdruckkräfte in raumfugelosen Betonfahrbahnen. Straßenforschung Heft 15, Wien 1974.

[3] Zachlehner, A.: Beanspruchung von Betonfahrbahnen durch Einflüsse aus Hydratation und Witterung. Mitt. d. Prüfamtes für den Bau von Landverkehrswegen d. TU München. Heft 57 (1989).

[4] Groicher, G.: Finite Elemente Berechnungen von Betonfahrbahnplatten unter wirklichkeitsnahen Lastmustern. Diplomarbeit FH Kärnten 2004.

[5] Gross D., Hauger W., Schnell W., Wriggers P.: Technische Mechanik Band 4, 2. Auflage, Springer-Verlag Berlin 1995.

[6] Lehmann, Th.: *Elemente der Mechanik IV: Schwingungen, Variationsprinzipie*. Vieweg-Verlag, 2. Auflage, Braunschweig 1985.

[7] Eisenmann, J., Leykauf G.: *Betonfahrbahnen*. 2. Auflage. Verlag W.Ernst & Sohn, Berlin 2003.